Ayudantía 9 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 + \sin(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 2

Suponga que $y = y(x)$ y $y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Encuentre el conjunto de curvas solución de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} + \frac{x-2}{2y}$$

Problema 3

Resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 4

Para la ecuación $\ddot{x} = f(x)$:

a) Muestre que si $x(t) = 1/(1+t)$ es una solución, entonces $y(t) = 1/(1-t)$ también es solución.

b) Encuentre f tal que $x(t)$ sea solución.

Problema 5

Encuentre el conjunto de curvas solución de:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-5} - 2x^{-1}y, y(1) = -1 \text{ con } x > 0$$

Problema 6

Encuentre el conjunto de curvas solución de:

$$\frac{dy}{dx} = x\left(3y + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Problema 7

Encuentre el conjunto de curvas solución de:

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$$

Problema 1

Notemos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) = x^2 + \sin(x) &\iff \frac{df}{dx} = x^2 + \sin(x) \\
&\iff df = (x^2 + \sin(x))dx \\
&\implies \int df = \int (x^2 + \sin(x))dx \\
&\implies f(x) = \frac{x^3}{3} - \cos(x) + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalmente recordemos que $f(0) = 1$ por tanto:

$$\begin{aligned}
f(0) = 1 &\iff \frac{0^3}{3} - \cos(0) + C = 1 \\
&\iff -1 + C = 1 \\
&\iff C = -2
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \cos(x) - 2 \quad \blacksquare$$

Problema 2

Sea $u = y^2 + x$ (que es lo que esta en el numerador de la suma de fracciones) entonces vamos a tener que $\dfrac{du}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx} + 1$ entonces reemplazando en nuestra ecuación tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} + \frac{x-2}{2y} &\Longleftrightarrow 2y\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 2y\left(\frac{y}{2} + \frac{x-2}{2y}\right) + 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{dx} = y^2 + x - 2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{dx} = u - 1 \end{aligned}$$

Entonces ahora buscaremos las curvas solución de la ecuación:

$$\frac{du}{dx} = u - 1$$

Ahora nos pondremos en caso pues no podemos asegurar que $u - 1 \neq 0$ entonces:

- **Caso 1:** Supongamos que $u - 1 = 0 \Longleftrightarrow u = 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = 0 &\Longleftrightarrow \frac{du}{dx} = 1 - 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{du}{dx} = u - 1 \end{aligned}$$

  Por lo tanto la curva $u = 1$ es solución de la ecuación.

- **Caso 2:** Supongamos que $u - 1 \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = u - 1 &\Longleftrightarrow \frac{du}{u-1} = dx \\ &\Longleftrightarrow \int \frac{du}{u-1} = \int dx \\ &\Longleftrightarrow \ln|u-1| = x + C \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow |u-1| = e^{x+C} \\ &\Longleftrightarrow |u-1| = Ke^x \quad K = e^c \end{aligned}$$

  Por lo tanto la curva $|u - 1| = Ke^x$ es solución de la ecuación.

Finalmente la solución de la ecuación original viene dada por:

$$\begin{cases} \left|y^2 + x - 1\right| = Ke^x \quad K \in \mathbb{R} \quad ; \quad \text{Solución general.} \\ \\ y^2 + x - 1 = 0 \quad ; \quad \text{Solución particular.} \end{cases}$$

Problema 3

En primer lugar vamos a suponer que $y \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} &\Longrightarrow \frac{dy}{y^3} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \\ &\Longrightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \\ &\Longrightarrow -\frac{y^{-2}}{2} = \sqrt{1+x^2} + C; \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Luego como $y(0) = 1$ se concluye que $C = -\dfrac{3}{2}$. Finalmente la solución al problema viene dada por:

$$-\frac{y^{-2}}{2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}$$

Problema 4

Este es un claro ejemplo del cuidado que hay que tener con la derivada temporal.

a) Notemos que $y(t) = x(-t)$ y $\ddot{y}(t) = \ddot{x}(-t)$. Reemplazando en la ecuación y suponiendo que $x(t)$ la resuelve, se sigue que $y(t)$ también la resuelve pues:

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(-t) = f(x(-t)) = f(y(t))$$

b) Notemos que $\ddot{x}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} = 2(x(t))^3$, por lo tanto basta tomar $f(x) = 2x^3$, y así $x(t)$ es solución.

Problema 5

Notemos que:

$$y' = x^{-5} - 2x^{-1}y \Longleftrightarrow y' + 2x^{-1}y = x^{-5}$$

Luego esto es una EDO lineal por lo tanto necesitamos calcular el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int 2x^{-1}dx} = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$$

Y además:

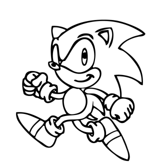
$$\int x^{-5}\mu(x)dx = \int x^{-5}x^2dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2}$$

Finalmente utilizando el siguiente resultado:

$$y' + p(x)y = q(x) \Longrightarrow y = \frac{1}{\mu(x)}\left(c + \int q(x)\mu(x)dx\right), C \in \mathbb{R}$$

Se tiene que:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(C + \frac{x^{-2}}{-2}\right), C \in \mathbb{R}$$



Problema 6

Notemos que:

$$y' = x\left(3y + \sqrt[3]{y^2}\right) \iff y' = 3xy + xy^{\frac{2}{3}} \iff y' - 3xy = xy^{\frac{2}{3}}$$

De donde se obtiene que esta EDO es una Bernoulli por tanto haremos el cambio $u = y^{1-\frac{2}{3}}$ lo que implica que $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\dfrac{dy}{dx}$, luego haciendo los cambios:

$$\frac{dy}{dx} - 3xy = xy^{\frac{2}{3}} \iff \frac{1}{3}\frac{dy}{dx}y^{-\frac{2}{3}} - xy^{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x \iff \frac{du}{dx} - xu = \frac{x}{3}$$

Donde la EDO obtenida es una lineal. Entonces:

$$\mu(x) = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Y:

$$\int \frac{x}{3}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{3}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Finalmente:

$$u(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left(C + \frac{1}{3}e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \iff (y(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\left(C + \frac{1}{3}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Problema 7

Notemos que:

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3 \iff y' = (y-x)^2 - 3$$

Luego $y = x - 2$ es solución de la EDO. Pues

$$y' = 1 = 4 - 3 = (2)^2 - 3 = (-2)^2 - 3 = (x - 2 - x)^2 - 3 = (y-x)^2 - 3$$

Además en su forma original es claro que es una EDO de Riccati por ende haciendo el cambio de variable $y = x - 2 + \dfrac{1}{z}$ luego $y' = 1 - \dfrac{1}{z^2}z'$. Reemplazando

$$y' = (y-x)^2 - 3 \iff 1 - \frac{1}{z^2}z' = \left(x - 2 + \frac{1}{z} - x\right)^2 - 3 \iff -z^{-2}z' = \left(\frac{1}{z} - 2\right)^2 - 4 \iff -z^{-2}z' = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 4 - 4 \iff z' = -4z + 1$$

La cual es una edo lineal. Entonces:

$$\mu(x) = e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

y:

$$\int 1\mu(x)dx = \int e^{4x}dx = \frac{e^4x}{4}$$

Por lo tanto

$$z = e^{-4x}\left(C + \frac{e^{4x}}{4}\right) \iff \frac{1}{y - x + 4} = e^{-4x}\left(C + \frac{e^{4x}}{4}\right)$$